

BIG B4NG challenge, 19. Wettbewerb Aufgabe 1

Bäume

Diese 1. Aufgabe in unserem Wettbewerb wird vom Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik der Leibniz Universität Hannover gestellt.

Weitere Informationen zum Studiengang der Mathematik findet ihr unter <http://www.math.uni-hannover.de/>

In dieser Aufgabe geht es nicht um *quercus ilex*, *olea europaea*, oder *sequoiadendron giganteum* (Bild rechts), sondern um eine abstrakte Struktur namens **Baum**.

Aus dem Computeralldag dürften uns Bäume geläufig sein: Die meisten Betriebssysteme verwalten unsere Daten mittels eines Baumverzeichnisses. Dies ist sehr vorteilhaft für effizientes Suchen:

Stellt euch einmal vor, in einem Archiv gibt es zehn Zimmer Z_0, Z_1, \dots, Z_9 ; in jedem Zimmer sind 100 Ordner mit jeweils 1.000 Seiten gelagert. Das gibt die stolze Summe von einer Million Seiten!

Dennoch könnt ihr *jede* Seite mit nur drei Anweisungen finden, etwa $Z_5.83.245$ („gehe zu Zimmer Z_5 , nimm den 83. Ordner und das Blatt 245 heraus“).



Bildnachweis:

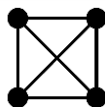
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:General_Grant_tree.jpg

Bäume sind Graphen

Bäume sind spezielle **Graphen**. Für uns soll ein Graph aus endlich vielen **Punkten** (oder Knoten) und **Kanten** bestehen.

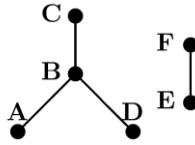
Zwei verschiedene Punkte in einem Graphen können durch eine Kante verbunden sein oder auch nicht, das ist alles.

Graphen kann man zeichnen, z. B. ist



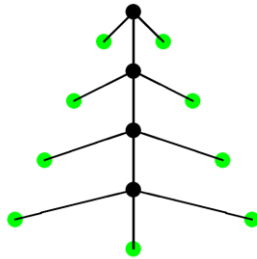
eine mögliche Zeichnung des Graphen mit 4 Punkten und der maximal möglichen Anzahl von Kanten, nämlich 6.

Mit Graphen können die verschiedensten Dinge dargestellt werden. Zum Beispiel könnte



das Zug-Netz eines kleinen Landes repräsentieren: Es gibt sechs Städte A, B, ..., F; zwei Städte sind mit einer Kante verbunden, wenn es eine Zugstrecke zwischen den beiden Städten gibt. Wie lang die Zugstrecken sind, interessiert uns nicht, mit dem Graphen halten wir nur fest, ob es eine solche Verbindung gibt oder nicht. Aus der Zeichnung wissen wir sofort, dass jede Zugreise von A nach C über die Stadt B führt und dass es keine Zugverbindung von A nach F gibt: Wir sagen, der Graph ist **nicht zusammenhängend**.

Nun können wir Bäume definieren: Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Graph (man kann je zwei Punkte durch einen *Kantenzug* verbinden) und wenn man eine Kante aus dem Graphen entfernt (egal welche!), dann ist der resultierende Graph *nicht mehr* zusammenhängend. Zum Beispiel ist



ein Baum mit 13 Punkten.

a) Grundlagenteil (10 Punkte):

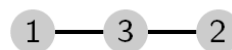
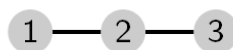
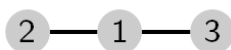
Frage 1

Zeichnet Bäume mit 2, 3, 4, 5 und 10 Punkten.

Ihr werdet feststellen, dass jeder Baum mit n Punkten bzgl. n eine feste Anzahl von Kanten besitzt. Wie viele sind es und warum?

Markierte Bäume

Markierungen sind (unterscheidbare) Namen für die Punkte eines Graphen. Bei unserem Zug-Netz zum Beispiel können wir etwa einen Baum mit den Markierungen A, B, C, D finden. Es bietet sich an, als Markierungen für einen Baum mit n Punkten die Zahlen von 1 bis n zu verwenden. Nun ist Vorsicht geboten: Obwohl es einen einzigen Baum mit drei Punkten gibt, gibt es drei verschiedene **markierte** Bäume mit drei Punkten (je nachdem, wie der mittlere Punkt markiert ist):



Frage 2

Wie viele verschiedene markierte Bäume mit 4 Punkten gibt es? Zeichnet diese! Gebt mindestens 10 verschiedene markierte Bäume mit 5 Punkten an.

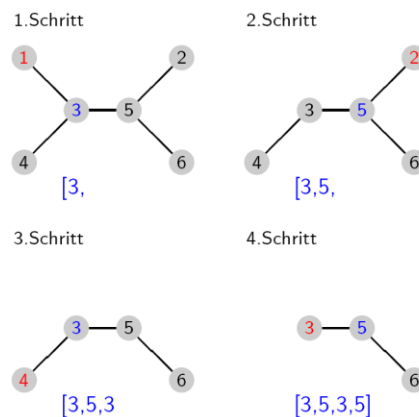
b) Mittlerer Teil (10 Punkte)

Bäume codieren: Pflückalgorithmus

Wie es sich für einen Baum gehört, haben auch unsere Bäume Blätter. Wir nennen einen Punkt eines Baumes **Blatt**, wenn er mit *nur* einem einzigen Punkt durch eine Kante verbunden ist. Wir haben alle Blätter unseres Beispielbaums grün gefärbt.

Mit Hilfe der Blätter können wir nun jeden markierten Baum in eine Liste übersetzen: Wenn unser Baum mindestens drei Punkte besitzt, so suchen wir das Blatt mit der *niedrigsten* Markierung und „pflücken“ dieses Blatt (d. h. wir entfernen das Blatt und die Kante, an der es hängt, vom Baum).

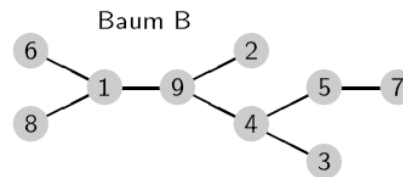
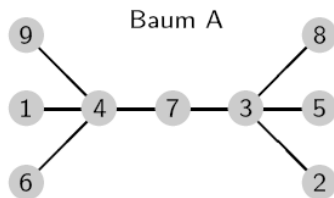
Dabei notieren wir *nicht* die Markierung des Blatts, sondern die des Knotens, an dem das Blatt hängt! Wir zerpflücken unseren Baum so lange, bis nur noch zwei Punkte übrig bleiben, dann hören wir auf. Hierbei entsteht aus einem markierten Baum mit n Punkten eine Liste mit $n-2$ Einträgen, wobei jeder Eintrag eine Zahl zwischen 1 und n ist (die wiederholt auftreten kann). Schauen wir uns ein Beispiel an:



Als Ergebnis unserer Zerpflückung erhalten wir also die Liste [3,5,3,5].

Frage 3

Zerpflückt die beiden folgenden Bäume und gebt diejenigen Listen an, die dabei entstehen.



Bäume rekonstruieren

Tatsächlich eignet sich unsere Methode zur **Kodierung** von markierten Bäumen: Jeder markierte Baum lässt sich aus der durch den Algorithmus entstandenen Liste wiederherstellen!

Frage 4

Überlegt euch und beschreibt detailliert eine Methode, mit der man aus jeder Liste mit $n-2$ Einträgen, wobei jeder Eintrag eine beliebige Zahl zwischen 1 und n sein kann, einen markierten Baum derart konstruiert, dass nach dessen Zerpflückung die Anwendung eurer Methode den ursprünglichen markierten Baum wiederherstellt.

Rekonstruiert dann Schritt für Schritt die markierten Bäume mit 9 Punkten, die zu den beiden folgenden Listen gehören:

Baum C: [2,5,7,5,4,3,2]

Baum D: [9,6,6,4,9,2,8]

c) Für Profis (10 Punkte)

Bäume zählen

Nun solltet ihr in der Lage sein, unsere letzten Fragen zu beantworten:

Frage 5

Wie viele markierte Bäume mit n Punkten gibt es? Könnt ihr das begründen?

Frage 6

Wie viele **unmarkierte** Bäume mit 5 Punkten gibt es? Begründet, warum es gerade so viele sind.

Viel Erfolg bei dieser ersten Aufgabe!

Allgemeine Hinweise

Einsendeschluss: Sonntag, 20. Oktober 2019, 19:59 Uhr.

Gebt eure Lösungen über unser Portal ab: <https://unikik-portal.de/anmeldungen/>

Zulässige Dateiformate sind PDF für die zusammengeschriebene Lösung (mit eingebetteten Bildern) sowie unter Windows gängige Videoformate, die sich ohne Installation von zusätzlicher Software abspielen lassen, z. B. mp4.

Die Dateien sollten nicht größer als 7,5 MB sein (die Dateien können gezippt sein)! Bitte gebt auch euren Teamnamen, die Namen der Gruppenmitglieder sowie deren Schulen an. Bitte benennt eure hochgeladenen Dateien nach dem Gruppennamen.

ACHTUNG bei Zip-Dateien! Um sicherzugehen, dass eure Dateien wirklich fehlerfrei und für die Korrektoren/-innen zu öffnen sind, solltet ihr eure Zip-Dateien etc. noch mal von eurem Account herunterladen und öffnen. Dateien, die sich nicht öffnen lassen, können nicht bewertet werden!

Gebt eure Lösungen auch dann ab, wenn ihr nicht alle Fragen beantworten konntet! Vielleicht gelingt euch das ja bei den kommenden Aufgaben.

Die Teilnahmebedingungen und weitere Informationen findet ihr unter <https://www.uni-hannover.de/bigbangchallenge>.

Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.