B!g B4ng challenge, 17. Wettbewerb
Aufgabe 4

Zahlenmuster

Die vierte Aufgabe wird vom Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik der Leibniz Universität Hannover gestellt.

Weitere Informationen zum Studiengang Mathematik findet ihr unter
`http://www.math.uni-hannover.de`.

Zahlenmuster üben seit jeher eine starke Faszination auf Menschen aus. Wir hoffen, mit dieser Aufgabe eure eigene Faszination zu wecken!

Eine einfache Regel. Wir betrachten den folgenden Streifen: Er ist oben und unten durch zwei Zeilen mit Einsen und nach links durch eine Zickzacklinie von Einsen begrenzt. Nach rechts ist er unbegrenzt. Die Fragezeichen stehen für Zahlen, die noch gefunden werden müssen. Der Streifen enthält insgesamt sieben Zeilen.

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
&&&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&\dots \\
&&&1&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&\dots \\
&&1&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&\dots \\
&&&1&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&\dots \\
&&1&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&\dots \\
&1&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&\dots \\
1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&\dots
\end{array}
$$

Aufgabe 1 [5 Punkte]
Füllt den Streifen nach der folgenden multiplikativen Regel aus (ersetzt also die Fragezeichen): Für jede Raute aus vier benachbarten Zahlen

$$
\begin{array}{ccc}
 & b & \\
a & & d \\
 & c &
\end{array}
$$

soll gelten, dass das Produkt von a und d um eins größer ist als das Produkt von b und c.
Müsst ihr bis ins Unendliche rechnen? Beschreibt in kurzen Worten, welche Symmetrieeigenschaft das entstandene Muster besitzt, die euch unendliche Mühen erspart!

Ab hier wollen wir uns systematisch mit Zahlenmustern beschäftigen, die die multiplikative Regel aus Aufgabe 1 erfüllen. Zuerst werden wir zwei Möglichkeiten kennenlernen, die zu solchen Mustern führen. Beide Möglichkeiten hängen mit (regulären) N-Ecken zusammen; die erste ist geometrischer und die zweite kombinatorischer Natur. Abschließend werden wir den Versuch unternehmen, die beobachtete Symmetrie aus Aufgabe 1 zu erklären.
Lasst uns zunächst präzisieren, wie die Zahlenmuster genau aussehen sollen, die wir betrachten wollen. Die Zahlenmuster sollen **nach links und nach rechts unbegrenzt** verlaufen, aus endlich vielen Zeilen **positiver** (reeller) **Zahlen** bestehen, wobei **die oberste und die unterste Zeile jeweils nur Einsen** enthalten, und überall die **multiplikative Regel** erfüllen. Hat das Muster genau N Zeilen, so werden wir es ein Zahlenmuster der Ordnung $N + 1$ nennen (warum dies sinnig ist, wird sich im weiteren Verlauf zeigen).
Schon diejenigen Muster, bei denen jede Zeile dieselbe Zahl enthält, sind hochgradig interessant. Diesen wollen wir uns zunächst widmen.

Kleine Beispiele: Ordnung 4 und 5.

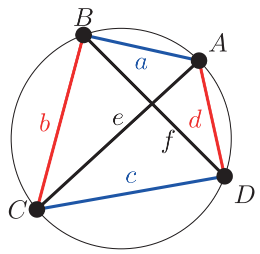
$$
\begin{array}{cccccccccc}
\dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \\
\dots & & a & & a & & a & & a & \dots \\
\dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
\dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\
\dots & & b & & b & & b & & \dots \\
\dots & c & & c & & c & & c & \dots \\
\dots & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots
\end{array}
$$

Aufgabe 2 [5 Punkte]

(i) Bestimmt die Zahl a, damit der linke Streifen ein Zahlenmuster der Ordnung 4 wird. Was hat die Zahl a mit der Diagonalen eines Quadrats der Seitenlänge 1 zu tun?

(ii) Damit der rechte Streifen ein Zahlenmuster der Ordnung 5 ist, muss die Zahl b mit der Zahl c übereinstimmen. Warum ist das so und wie lautet die goldene Zahl b?
Hinweis: Beachtet die multiplikative Regel und vergesst nicht, dass die Einträge b und c positiv sein sollen.

Auch die Zahl b aus Aufgabe 2 lässt sich geometrisch interpretieren, und zwar als Länge einer beliebigen Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks der Seitenlänge 1. Die Länge einer solchen Diagonalen lässt sich recht einfach mit einem Satz aus der Elementargeometrie berechnen, den wir als Nächstes vorstellen wollen: Der Satz von Ptolomäus. Der Name Ptolomäus dürfte euch aus dem (längst verworfenen) Ptolomäischen Weltbild bekannt sein. Die astronomischen Interessen haben Ptolomäus dazu geführt, sich mit Mathematik zu beschäftigen. Uns ist der folgende auf ihn zurückgehende Lehrsatz überliefert worden:

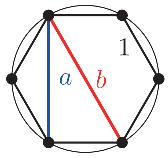


Satz von Ptolomäus
In einem Sehnenviereck (d. h., die vier Eckpunkte A, B, C, D liegen auf einem Kreis) ist das Produkt der Längen der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der Längen sich gegenüber liegender Seiten. Mit den Bezeichnungen der Skizze gilt also:

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d.$$

Der Satz von Ptolomäus ist der Schlüssel, der es uns erlauben wird, eine erste, geometrische Brücke zwischen Zahlenmustern und regulären N-Ecken zu schlagen.

Reguläre N-Ecke. In diesem Abschnitt betrachten wir ein reguläres Sechseck der Seitenlänge 1:



Verbindet man zwei (nicht benachbarte) Eckpunkte, so erhält man eine *Diagonale* des Sechsecks. Das Sechseck hat viele Diagonalen, allerdings haben solche nur jeweils eine von zwei unterschiedlichen Längen, die wir mit a und b bezeichnen wollen (siehe Skizze).

Aufgabe 3 [5 Punkte]

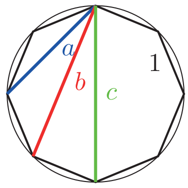
(i) Bestimmt die Zahlen a und b mit Hilfe des Satzes von Ptolomäus.

(ii) Könnt ihr die Gleichungen, die a und b erfüllen müssen, zu geeigneten Sehnenvierecken im Sechseck in Verbindung setzen und damit zeigen, dass

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\
\dots & & a & & a & & a & & \dots \\
\dots & b & & b & & b & & b & \dots \\
\dots & & a & & a & & a & & \dots \\
\dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots
\end{array}
$$

ein Zahlenmuster der Ordnung 6 ist?

Ein allgemeines Beispiel. Wir versuchen nun anhand eines größeren Beispiels, den bisher nur angedeuteten Zusammenhang zwischen regulären N-Ecken (der Seitenlänge 1) und Zahlenmustern der Ordnung N (mit einer festen Zahl pro Zeile) systematisch herzustellen. Wir betrachten diesmal ein 8-Eck mit den drei unterschiedlichen Diagonallängen $a < b < c$:



Parallel hierzu betrachten wir das folgende Zahlenmuster der Ordnung 8, bei dem jeweils ein Exemplar der fünf möglichen Rauten (man arbeite sich von oben nach unten Zeile für Zeile durch) farblich (abwechselnd) hervorgehoben ist:

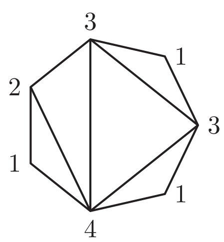
...		1		1		1		1		1		1		1		...
...	a		a		a		a		a		a		a		a	...
...		b		b		b		b		b		b		b		...
...	c		c		c		c		c		c		c		c	...
...		b		b		b		b		b		b		b		...
...	a		a		a		a		a		a		a		a	...
...		1		1		1		1		1		1		1		...

Aufgabe 4 [5 Punkte]

Könnt ihr für jede der fünf farbigen Rauten ein passendes Sehnenviereck im regulären Achteck finden, welches die Gültigkeit der multiplikativen Regel begründet?
Hinweis: Rock around the clock!
Achtung: Die Zahlen a, b und c sollen nicht berechnet werden.

Neben diesen geometrisch inspirierten Zahlenmustern wollen wir eine weitere, kombinatorische Art kennenlernen, solche Muster zu produzieren. Diese lässt sich auch an (regulären) N-Ecken veranschaulichen und besitzt die Besonderheit, dass die zugehörigen Muster nur natürliche Zahlen als Einträge haben.

Triangulierungen. Zeichnet man in ein (reguläres) N-Eck $N-3$ Diagonalen ein, die sich jeweils nicht kreuzen, so wird die vom N-Eck abgegrenzte Fläche in $N-2$ Dreiecke unterteilt; man spricht daher von einer *Triangulierung* des N-Ecks.
Bei einer gegebenen Triangulierung zählen wir bei jeder einzelnen Ecke ab, wie viele Dreiecke (aus der Triangulierung) an dieser Ecke aneinander liegen, und notieren dies. Anbei ein Beispiel mit einer Triangulierung eines Heptagons (mit sieben Ecken):



Nun entscheiden wir uns für eine Nummerierung der Ecken: Wir fangen zum Beispiel bei der am weitesten rechts liegenden Ecke an und lesen gegen den Uhrzeigersinn; es entsteht die Sequenz

$$3, 1, 3, 2, 1, 4, 1.$$

Diese Sequenz wird nun, periodisch nach links und rechts fortgesetzt, in die zweite Zeile (von oben gezählt) eines Streifens der Ordnung 7 (!) eingetragen:

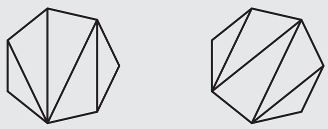
$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
\dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \\
\dots & & 4 & & 1 & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} & & 3 & & 1 & \dots \\
\dots & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & \dots \\
\dots & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & \dots \\
\dots & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & \dots \\
\dots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots
\end{array}$$

Überraschenderweise lässt sich ein solcher Streifen mit Hilfe der multiplikativen Regel jeweils zu einem vollständigen Zahlenmuster ergänzen, welches darüber hinaus nur natürliche Zahlen enthält.

Aufgabe 5 [5 Punkte]

(i) Vervollständigt das Muster zum obigen Beispiel!

(ii) Erstellt die Zahlenmuster zu den folgenden beiden Triangulierungen:



(iii) Beschreibt eingehend die gemeinsame Symmetrie aller drei errechneten Muster dieser Aufgabe.

Symmetrie. Mit zahlreichen Beispielen für Zahlenmuster gerüstet, steht euch nichts mehr im Wege, viele der versteckten Gesetzmäßigkeiten ihrer Einträge zu entdecken – allesamt letzlich durch die simple multiplikative Regel verursacht. Es dürfte euch nicht entgangen sein, dass die hier betrachteten Zahlenmuster alle eine gewisse Symmetrie aufweisen. Als Abschluss wollen wir uns überlegen, warum dies so ist. Entscheidend hierfür ist die Betrachtung zweier aufeinander folgender Rauten eines Zahlenmusters:

$$\begin{array}{cccc}
 & b & & \\
a & & d & \\
 & c & & f \\
 & & e &
\end{array}$$

Aufgabe 6 [5 Punkte]

(i) Zeigt, dass je sechs Zahlen $a, \dots, f$ in zwei aufeinander folgenden Rauten eines Zahlenmusters (wie oben angeordnet) immer die folgende Beziehung erfüllen:

$$\frac{a+e}{c} = \frac{b+f}{d}$$

(ii) Betrachtet den folgenden Abschnitt eines (an und für sich beliebigen) Zahlenmusters:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & (0) & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & & & & \bullet & & \bullet & & y \\
 & & & & & b & & \bullet & & \bullet & \\
 & & & & a & & d & & \bullet & & \\
 & & & \bullet & & c & & f & & & \\
 & & \bullet & & \bullet & & e & & & & \\
 & \bullet & & \bullet & & \bullet & & & & & \\
x & & \bullet & & \bullet & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & (0) & & & & & & & &
\end{array}$$

Könnt ihr den Eintrag x (unten links) mit dem Eintrag y (oben rechts) in Beziehung setzen und damit die Symmetrie der betrachteten Zahlenmuster erklären?
Hinweis: Teil (i) dürfte sich als hilfreich erweisen. Die Nullen in Klammern weisen auf eine nützliche Erweiterung des Zahlenmusters durch eine zusätzliche Zeile (welche?) oben und unten hin.

Allgemeine Hinweise

Einsendeschluss: Sonntag, 28. Januar 2018, 19:59 Uhr.

Gebt eure Lösungen über das Portal von uniKIK ab:
`https://portal.studienberatung.uni-hannover.de/`

Zulässige Dateiformate sind: PDF für die zusammengeschriebene Lösung (mit eingebetteten Bildern) sowie unter Windows gängige Videoformate, die sich ohne Installation von zusätzlicher Software abspielen lassen, z.B. mp4.

Die Dateien sollten nicht größer als 7,5 MB sein (die Dateien können gezippt sein)! Bitte gebt auch euren Teamnamen, die Namen der Gruppenmitglieder sowie deren Schulen an. Bitte benennt eure hochgeladenen Dateien nach dem Gruppennamen.

ACHTUNG bei Zip-Dateien! Um sicher zu gehen, dass eure Dateien wirklich fehlerfrei und für die Korrektor/-innen zu öffnen sind, solltet ihr eure Zip-Dateien etc. noch einmal von eurem Account runterladen und öffnen. Dateien, die sich nicht öffnen lassen, können nicht bewertet werden!

Ihr könnt und solltet eure Lösung auch dann abgeben, wenn ihr nicht alle Fragen beantworten konntet, insbesondere die letzte Teilaufgabe nicht gelöst habt!

Die Teilnahmebedingungen und weitere Informationen findet ihr unter:
`https://www.studienberatung.uni-hannover.de/bigbangchallenge.html`

Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.